Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren.

Von

Hans Fitting in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

		Seite
Einleitung		16
§ 1.	Hilfsbetrachtungen	18
§ 2.	Der Krull-Schmidtsche Satz	21
§ 3.	Der Schmidtsche Austauschsatz	24
§ 4.	Notwendige und hinreichende Bedingungen für die absolute Eindeutigkeit der „Remakschen Zerlegungen“	24
§ 5.	Verallgemeinerungen	30

Einleitung.

In dieser Arbeit handelt es sich um Gruppen (mit oder ohne Operatoren), in denen der Doppelkettensatz für die Normalteiler vorausgesetzt wird. Ist von Gruppen schlechthin die Rede, so sind immer solche von der genannten speziellen Art gemeint. Für diese Gruppen wird eine Neubegründung und Ergänzung der Theorie der direkten Produktzerlegungen in direkt unzerlegbare Faktoren („Remaksche Zerlegungen“) gegeben, welche auf der — im folgenden mit F zitierten — Abhandlung des Verfassers: Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nichtkommutativen Gruppen [Math. Annalen **107** (1932), S. 514—542] aufbaut. Die Darstellung ist jedoch so gehalten, daß ein Verständnis des folgenden auch ohne Kenntnis von F möglich sein wird, da die wichtigsten aus F übernommenen Hilfsmittel und Begriffe teils im Text, teils in Fußnoten noch einmal kurz hergeleitet bzw. erklärt werden.

Im Mittelpunkt steht ein neuer, besonders einfacher Beweis des Krull-Schmidtschen Satzes, daß eine Gruppe (von der in dieser Arbeit betrachteten speziellen Art) bis auf zentrale Isomorphie eindeutig als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen dargestellt werden kann (§ 2). Dieser Beweis wird durch sukzessiven Ersatz der Faktoren einer Remakschen Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ durch die einer anderen $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_n$ geführt. Die Möglichkeit eines solchen Ersatzes wird — nachdem jedes $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ in seine $\mathfrak{K}$-Komponenten $H_\mu = K_{\mu 1} \cdot \ldots \cdot K_{\mu n}$, jedes $K_\nu \in \mathfrak{K}_\nu$ in seine $\mathfrak{H}$-Komponenten $K_\nu = H_{\nu 1} \cdot \ldots \cdot H_{\nu m}$ zerlegt worden ist — durch Betrachtung der n aus den beiden Isomorphismen $J_{\mu\nu} = H_\mu \to K_{\mu\nu}$, $\bar{J}_{\nu\mu} = K_\nu \to H_{\nu\mu}$ [siehe Fußnote [2])] zusammengesetzten Automorphismen $\Theta_\nu = J_{\mu\nu} \cdot \bar{J}_{\nu\mu}$ von $\mathfrak{H}_\mu$ [siehe Fußnote [2])] nachgewiesen. Es stellt sich heraus, daß die Θ_ν „normal" [siehe Fußnote [3])] und „addierbar" sind [siehe Fußnote [5])] und daß die „Summe" $\sum_\nu \Theta_\nu$ [siehe Fußnote [5])] der identische Automorphismus von $\mathfrak{H}_\mu$, also „eigentlich" ist [siehe Fußnote [2])]. Der springende Punkt des Beweises ist die aus den Resultaten von F leicht zu gewinnende Erkenntnis, daß mit der Summe $\Sigma\Theta_\nu$ auch einer der Summanden (etwa Θ_α) und mit ihm auch jeder der Isomorphismen $J_{\mu\alpha}$, $\bar{J}_{\alpha\mu}$ eigentlich sein muß, was mit der Austauschbarkeit der Faktoren $\mathfrak{H}_\mu$ und $\mathfrak{K}_\alpha$ äquivalent ist! Hiermit ist der Schmidtsche Austauschsatz gleichzeitig mitbewiesen (§ 3). Anschließend wird die — in dieser Allgemeinheit meines Wissens noch nicht behandelte — Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die absolute Eindeutigkeit der Remakschen Zerlegungen untersucht, die sich unter Benutzung der in F entwickelten Theorie vollständig erledigen läßt (§ 4). Eine Gruppe besitzt stets dann und nur dann eine einzige Remaksche Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$, wenn für $\mu \neq \nu$ alle „normalen" $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen [siehe Fußnote [3])] $\mathfrak{H}_\mu$ auf das Einheitselement von $\mathfrak{H}_\nu$ abbilden. Als Spezialfall ergibt sich als hinreichende aber nicht notwendige Bedingung, daß homomorphe Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf Untergruppen $\bar{\mathfrak{Z}}$ des Zentrums von $\mathfrak{G}$ nicht möglich sind, wenn $\bar{\mathfrak{Z}}$ mehr als das Einheitselement enthält; dies ergibt sich auch unabhängig von dem allgemeinen Kriterium direkt daraus, daß die Gruppe unter der gemachten Voraussetzung neben dem identischen Automorphismus keine eigentlichen, zentralen Automorphismen Θ mehr besitzen kann, da bei einem solchen die Zuordnung $A \to A \cdot (A\Theta)^{-1}$ — wegen $A \cdot (A\Theta)^{-1} \cdot B \cdot (B\Theta)^{-1} = A \cdot B \cdot (A\Theta \cdot B\Theta)^{-1}$ — eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe des Zentrums ist. In diesem Zusammenhang findet auch der merkwürdige von Herrn Speiser [1]) hervorgehobene Dualismus zwischen Zentrum und Restklassengruppe nach der Kommutatorgruppe (siehe unten Satz 8, § 4) eine einfache Erklärung: In beiden Fällen dieses Dualismus, bei dem Gruppen ohne Zentrum solchen Gruppen gegenüberstehen, die mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmen, sind die Remakschen Zerlegungen absolut eindeutig bestimmt, weil kein Automorphismus existiert, welcher die Gruppe auf eine von der Einheitsgruppe (E) verschiedene Untergruppe $\bar{\mathfrak{Z}}$ des Zentrums abbildet [siehe Fußnote [2])], da ein solcher eine homomorphe Abbildung der Restklassengruppe nach der Kommutatorgruppe auf $\bar{\mathfrak{Z}}$ vermitteln würde. Zum Schluß wird eine naheliegende Ausdehnung der

---

[1]) A. Speiser, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, 2. Aufl. (1927), S. 136.

Theorie auf direkte Produktzerlegungen in $\mathfrak{M}$-charakteristische und $\mathfrak{M}$-charakteristisch direkt unzerlegbare Faktoren gegeben, wobei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von Gruppenautomorphismen bedeutet, es gelingt dies mühelos durch Adjunktion von $\mathfrak{M}$ zum (eventuell auch leeren) Operatorensystem der Gruppe.

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Der neue Beweis, der in § 2 für den Krull-Schmidtschen Satz gegeben werden soll, stützt sich auf vier Hilfssätze aus F, die wir in diesem Paragraphen in einer für die speziellen Zwecke dieser Arbeit abgeänderten Fassung noch einmal, z. T. auch — vor allem den dritten (Peircesche Zerlegung) — wesentlich einfacher als in F beweisen. Unmittelbar finden von diesen Hilfssätzen beim Beweis des Krull-Schmidtschen Satzes übrigens nur der zweite und vierte Verwendung; der erste und dritte werden nur in diesem Paragraphen beim Beweis des zweiten und vierten benutzt.

Hilfssatz 1 (F, § 16, Hilfssatz 1). *$\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ seien zwei Gruppen mit demselben Operatorensystem. J sei ein $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$-Isomorphismus und $\mathfrak{K}^*$ ein Normalteiler von $\mathfrak{K}$. Ist der durch J induzierte $\mathfrak{K}^*\mathfrak{L}$-Isomorphismus J^* eigentlich*[2]*, so vermittelt J eine direkte Produktzerlegung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^* \times \mathfrak{K}^{**}$, wo $\mathfrak{K}^{**}$ aus allen Elementen $\mathfrak{K}^{**} \in \mathfrak{K}$ besteht, die durch J auf das Einheitselement E von $\mathfrak{L}$ abgebildet werden: $\mathfrak{K}^{**} J = E$.*

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{K}^{**}$ nach dem Homomorphiesatz Normalteiler von $\mathfrak{K}$. Ferner haben $\mathfrak{K}^*$ und $\mathfrak{K}^{**}$ nur das Einheitselement von $\mathfrak{K}$ gemein, so daß $\mathfrak{K}^* \cdot \mathfrak{K}^{**} = \mathfrak{K}^* \times \mathfrak{K}^{**} \subseteq \mathfrak{K}$ gilt. Setzt man für ein beliebiges Element $K \in \mathfrak{K}$ $(K J) J^{*-1} = K^*$, $K \cdot K^{*-1} = K^{**}$, so ist $K^* \in \mathfrak{K}^*$, $K^{**} \in \mathfrak{K}^{**}$ und $K = K^* \cdot K^{**}$, woraus $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^* \times \mathfrak{K}^{**}$ folgt.

Hilfssatz 2 (F, § 16, Hilfssatz 2). *$\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ seien drei direkt unzerlegbare Gruppen mit demselben Operatorensystem. Ist J_1 ein $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$-Isomorphismus, welcher $\mathfrak{H}$ auf einen Normalteiler $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{H} J_1$ von $\mathfrak{K}$ abbildet, J_2 irgendein $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$-Isomorphismus, und J_3 der aus J_1 und J_2 zusammengesetzte $\mathfrak{H}\mathfrak{L}$-Isomorphismus $H \to (H J_1) J_2 = J_3$, so sind mit J_3 auch J_1 und J_2 eigentlich.*

---

[2]) Nach F, § 2 wird bei Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ mit demselben Operatorensystem unter einem Isomorphismus (genauer $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$-Isomorphismus) eine operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf eine *Unter*gruppe $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ verstanden. Ein solcher heißt eigentlich, wenn er $\mathfrak{H}$ einstufig isomorph (umkehrbar eindeutig) auf die *volle* Gruppe $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$) abbildet, sonst uneigentlich. Im Fall $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$ werden die $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$-Isomorphismen nach F, § 3 auch Automorphismen von $\mathfrak{H}$ genannt, bei denen wieder eigentliche und uneigentliche zu unterscheiden sind.

Beweis. 1. Sicherlich ist der durch J_2 induzierte $\mathfrak{K}^*$ $\mathfrak{L}$-Isomorphismus J_2^* eigentlich, was nach Hilfssatz 1 wegen der direkten Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{H} J_1 = \mathfrak{K}$ und $J_2^* = J_2$ führt, also ist J_2 eigentlich.

2. Da $\mathfrak{H} J_1 = \mathfrak{K}$ gilt und J_1 eine *umkehrbar* eindeutige Abbildung ist, weil ja sonst J_3 gewiß nicht eigentlich sein könnte, ist auch J_1 eigentlich.

Hilfssatz 3 (F, § 4, Satz II). *Jeder normale*[3]) *Automorphismus Θ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ führt zu einer direkten Produktzerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{G}^{**}$ (die ich in* F, § 4 *die durch Θ erzeugte verallgemeinerte Peircesche Zerlegung von $\mathfrak{G}$ genannt habe), für ein hinreichend groß gewähltes n wird $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}\Theta^n$ und $\mathfrak{G}^{**}$ die aus allen Elementen G^{**} mit der Eigenschaft $G^{**}\Theta^n = E$ (Einheitselement) bestehende Gruppe.*

Beweis. Wählt man n so groß, daß in der absteigenden Kette $\mathfrak{G} \supseteqq \mathfrak{G}\Theta \supseteqq \mathfrak{G}\Theta^2 \supseteqq \ldots \supseteqq \mathfrak{G}\Theta^\nu \supseteqq \ldots$: $\mathfrak{G}\Theta^n = \mathfrak{G}\Theta^{n+1}$, also auch $(\mathfrak{G}\Theta^n)\Theta^n = \mathfrak{G}\Theta^n$ ausfällt, was wegen des vorausgesetzten Doppelkettensatzes (siehe Einleitung) gewiß möglich ist, so ist der von dem $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}\Theta^n$-Isomorphismus Θ^n induzierte Automorphismus Θ^* des Normalteilers $\mathfrak{G}\Theta^n = \mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ nach F, Satz I, § 4[4]) eigentlich, woraus die Behauptung nach Hilfssatz 1 unmittelbar hervorgeht.

Hilfssatz 4 (vgl. F, § 14, Satz 7). *Wenn die Summe addierbarer*[5]) *und normaler Automorphismen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ einer direkt unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ eigentlich ist, so ist auch einer der Automorphismen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ eigentlich.*

---

[3]) Bei Normalteilern $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ derselben Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt allgemein ein $\mathfrak{H}\,\mathfrak{K}$-Isomorphismus J *normal* (bezüglich $\mathfrak{G}$), wenn die Bedingung

$$G^{-1} \cdot H J \cdot G = (G^{-1} \cdot H \cdot G) J, \quad G \in \mathfrak{G}, \quad H \in \mathfrak{H}$$

erfüllt ist, d. h. die inneren (absoluten) Automorphismen mit zu den Operatoren der Gruppen gerechnet werden.

[4]) Es handelt sich um die Tatsache, daß ein normaler Automorphismus Θ^* einer Gruppe $\mathfrak{G}^*$ (mit Doppelkettensatz für die Normalteiler!) immer schon dann eigentlich ist, wenn $\mathfrak{G}^*\Theta^* = \mathfrak{G}^*$ gilt. — Der Beweis ergibt sich sofort durch Vergleich der „Hauptreihenlängen" von $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{G}_0^*$, wo $\mathfrak{G}_0^*$ die Gruppe aller von Θ^* auf die Einheit E abgebildeten Elemente von $\mathfrak{G}^*$ bedeutet, offenbar muß $\mathfrak{G}_0^* = (E)$ sein.

[5]) „Addierbar" nenne ich nach F, § 9 mehrere Automorphismen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn die „Addierbarkeitsbedingung" erfüllt ist, daß die Gruppen $\mathfrak{G}\Theta_1, \ldots, \mathfrak{G}\Theta_n$ zu je zwei elementweise miteinander vertauschbar sind. In diesem Fall verstehe ich unter der „Summe $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n$" den Automorphismus $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n = G \to G\Theta_1 \cdot \ldots \cdot G\Theta_n$. Das „Produkt" zweier Automorphismen Θ und Π wird wie üblich als der aus Θ und Π zusammengesetzte Automorphismus $\Theta\Pi = G \to (G\Theta)\Pi$ erklärt. Bei additiver und multiplikativer Verknüpfung im eben definierten Sinne bilden die *normalen* Automorphismen [s. Anm. [3])] einen sogenannten „verallgemeinerten Ring" (F, § 5): den „Automorphismenbereich" der Gruppe (F, § 9), dessen Theorie der Gegenstand von F ist.

Beweis. Wegen des Assoziativgesetzes

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_n = (((\Theta_1 + \Theta_2) + \Theta_3) + \Theta_4) + \ldots$$

(siehe Anm. 5 bzw. F, § 5 und 9) dürfen wir uns von vornherein auf den einfachsten Fall $n = 2$ beschränken.

Setzen wir $(\Theta_1 + \Theta_2)^{-1} = \Theta$, so wird $\Theta(\Theta_1 + \Theta_2) = \Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2$ der identische Automorphismus $A \to A$ von $\mathfrak{G}$, den wir genau wie in F (§ 10) mit P_1 bezeichnen: $\Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2 = P_1$.

Wir machen nun die ad absurdum zu führende Annahme, Θ_1, Θ_2 seien entgegen unserer Behauptung beide uneigentlich. Zunächst müßten dann $\Theta\Theta_1$ und $\Theta\Theta_2$ ebenfalls uneigentlich sein, da sonst $\Theta^{-1}(\Theta\Theta_1) = \Theta_1$ oder $\Theta^{-1}(\Theta\Theta_2) = \Theta_2$ eigentlich wäre (vgl. auch Hilfssatz 2). Auf Grund des Hilfssatzes 3 schließen wir hieraus, daß $\Theta\Theta_1$ und $\Theta\Theta_2$ nilpotent wären, d. h. für ein hinreichend großes n der Gleichung

$$\mathfrak{G}(\Theta\Theta_1)^n = \mathfrak{G}(\Theta\Theta_2)^n = (E) \quad \text{oder} \quad (\Theta\Theta_1)^n = (\Theta\Theta_2)^n = P_0$$

genügen würden, wo P_0 den ‚Nullautomorphismus" $A \to E$ von $\mathfrak{G}$ bezeichnet (siehe F, § 10). Wegen der aus $\Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2 = P_1$ folgenden multiplikativen Vertauschbarkeit von $\Theta\Theta_1$ und $\Theta\Theta_2$ hätte dies aber

$$P_1 = P_1^{2n} = (\Theta\Theta_1 + \Theta\Theta_2)^{2n} = \sum_{\nu=0}^{2n} \binom{2n}{\nu} (\Theta\Theta_1)^{2n-\nu} \cdot (\Theta\Theta_2)^{\nu} = P_0$$

zur Folge, was offenbar ein Widerspruch ist. Θ_1 und Θ_2 können also nicht beide gleichzeitig uneigentlich sein.

Anschließend beweisen wir noch einen fünften Hilfssatz, der — obwohl er beim Beweis des Krull-Schmidtschen Satzes nicht gebraucht wird — an dieser Stelle noch mit eingefügt werden soll, da er sonst in dieser Arbeit häufig benutzt wird.

Hilfssatz 5. *Bei verschiedenen Faktoren $\mathfrak{H}_\mu$, $\mathfrak{H}_\nu$ eines direkten Produktes $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ ist ein $\mathfrak{H}_\mu\mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus J stets dann und nur dann normal* [bezüglich $\mathfrak{G}$, siehe Anm. [3])], *wenn $\mathfrak{H}_\mu$ durch J auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch des Zentrums von $\mathfrak{G}$ abgebildet wird.*

Beweis. 1. Ist J normal, so ist $\mathfrak{H}_\mu J$ im Zentrum von $\mathfrak{H}_\nu$ enthalten, da für jedes $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ und $A_\nu \in \mathfrak{H}_\nu$ die Beziehung:

$$H_\mu J = (A_\nu^{-1} \cdot H_\mu \cdot A_\nu) J = A_\nu^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\nu$$

besteht.

2. Umgekehrt ist ein $\mathfrak{H}_\mu\mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus stets normal, wenn $\mathfrak{H}_\mu J$ zum Zentrum von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört; in der Tat gilt für $A_\lambda \in \mathfrak{H}_\lambda$ $(\lambda \neq \mu)$:

$$A_\lambda^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\lambda = H_\mu J = (A_\lambda^{-1} \cdot H_\mu \cdot A_\lambda) J$$

und für $A_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$:

$$A_\mu^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\mu = H_\mu J = (A_\mu J)^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A_\mu J = (A_\mu^{-1} \cdot H_\mu \cdot A_\mu) J,$$

womit die für normale Isomorphismen charakteristische Gleichung

$$A^{-1} \cdot H_\mu J \cdot A = (A^{-1} \cdot H_\mu \cdot A) J$$

für jedes Element $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m$ aus $\mathfrak{G}$ bewiesen ist.

§ 2.

Der Krull-Schmidtsche Satz.

Satz 1 [von W. Krull und Otto Schmidt[6]]. *Jede Gruppe (im speziellen Sinne dieser Arbeit) läßt sich bis auf normale Isomorphie eindeutig als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen darstellen:*

Bei zwei Zerlegungen

$$(1) \qquad \begin{cases} (h) & \mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m, \\ (k) & \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_n \end{cases}$$

dieser Art kann zwischen den $\mathfrak{H}_\mu$ und den $\mathfrak{K}_\nu$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung

$$(2) \qquad \begin{matrix} \mathfrak{H}_1 & \ldots\ldots & \mathfrak{H}_m \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathfrak{K}_{i_1} & \ldots\ldots & \mathfrak{K}_{i_m} \end{matrix}$$

hergestellt werden ($m = n$) und zwar so, daß die Abbildung $H_\mu \to K_{i_\mu}$, bei der jedem Element $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ seine $\mathfrak{K}_{i_\mu}$-Komponente K_{i_μ} zugewiesen wird, ein eigentlicher, normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_{i_\mu}$-Isomorphismus ist und die „Überführungsgleichungen"

$$(3) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{K}_{i_\mu} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

($\mu = 1, \ldots, m$) bestehen.

Beweis. Daß Zerlegungen im Sinne unseres Satzes überhaupt existieren, folgt aus dem vorausgesetzten Doppelkettensatz (siehe Einleitung) nach den üblichen Schlüssen. Wir gehen darum gleich zum Beweis der Eindeutigkeitsbehauptung über.

Zunächst zeigen wir, daß in (h) jedes $\mathfrak{H}_\mu$ durch mindestens ein $\mathfrak{K}_\nu$ ersetzt werden kann und dabei die Abbildung $H_\mu \to (\mathfrak{K}_\nu = \text{Komponente}$

---

[6]) W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschr. **23** (1925); Otto Schmidt, Unendliche Gruppen mit endlicher Kette, ebenda **29** (1929). Für gewöhnliche endliche Gruppen wurde der Satz im Abelschen Spezialfall von Frobenius und Stickelberger (Über Gruppen vertauschbarer Elemente, Crelle Journ. **86**, S. 217—262), im nichtkommutativen Fall von R. Remak (Zerlegungen endlicher Gruppen in direkt unzerlegbare Faktoren, ebenda **139**, 1911) bewiesen.

von H_μ) ein eigentlicher $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_\nu$-Isomorphismus ist. Zu diesem Zweck zerlegen wir jedes Element $H_\mu \in \mathfrak{H}_\mu$ in seine $\mathfrak{K}$-Komponenten

(4a) $$H_\mu = K_{\mu 1} \cdot \ldots \cdot K_{\mu n}$$

und jedes Element $K_\nu \in \mathfrak{K}_\nu$ in seine $\mathfrak{H}$-Komponenten

(4b) $$K_\nu = H_{\nu 1} \cdot \ldots \cdot H_{\nu m}.$$

Für $K_\nu = K_{\mu\nu}$ [siehe (4a)] schreiben wir (4b) auch in der Form

(4c) $$K_{\mu\nu} = H_{\nu 1}^{(\mu)} \cdot \ldots \cdot H_{\nu m}^{(\mu)}.$$

Die Zuordnung $H_\mu \to K_{\mu\nu}$ [siehe (4a)] ist offenbar ein normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_\nu$-Isomorphismus $J_{\mu\nu}$, die Zuordnung $K_\nu \to H_{\nu\mu}$ [siehe (4b)] ein normaler $\mathfrak{K}_\nu \mathfrak{H}_\mu$-Isomorphismus $\overline{J}_{\nu\mu}$ und die aus $J_{\mu\nu}$ und $\overline{J}_{\nu\mu}$ zusammengesetzte Zuordnung $H_\mu \to K_{\mu\nu} \to H_{\nu\mu}^{(\mu)}$ [siehe (4c)] ein natürlich ebenfalls normaler Automorphismus Θ_ν von $\mathfrak{H}_\mu$. Die Θ_ν sind addierbar (siehe Anm. 5), da mit den Elementen $K_1, \ldots, K_n$ bzw. aus $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ auch deren $\mathfrak{H}_\mu$-Komponenten $H_{1\mu}, \ldots, H_{n\mu}$ immer paarweise, also auch die Gruppen $\mathfrak{H}_\mu \Theta_1, \ldots, \mathfrak{H}_\mu \Theta_n$ zu je zweien elementweise miteinander vertauschbar sind. Wegen der Beziehung $H_\mu = H_{1\mu}^{(\mu)} \cdot \ldots \cdot H_{n\mu}^{(\mu)}$ — welche durch Einsetzen von (4c) in (4a) unmittelbar ersichtlich wird — ist die Summe $\Theta_1 + \ldots + \Theta_n$ (siehe Anm. 5) der identische Automorphismus von $\mathfrak{H}_\mu$, also eigentlich. Da $\mathfrak{H}_\mu$ direkt unzerlegbar ist, muß infolgedessen nach Hilfssatz 4 auch unter den Θ_ν wenigstens einer etwa Θ_α $(\nu = \alpha)$ eigentlich sein. Nach Hilfssatz 2 sind mit Θ_α auch $J_{\mu\alpha}$ und $\overline{J}_{\alpha\mu}$ eigentlich. Für jedes den Gruppen

$$\mathfrak{K}_\alpha \text{ und } \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

gemeinsame Element

$$K_\alpha = H_{\alpha,1} \cdot \ldots \cdot H_{\alpha,\mu-1} \cdot E \cdot H_{\alpha,\mu+1} \cdot \ldots \cdot H_{\alpha,m}$$

folgt hieraus $K_\alpha \overline{J}_{\alpha\mu} = E = E \overline{J}_{\alpha\mu}$ [siehe (4b)], d. h. $K_\alpha = E$, weil $\overline{J}_{\alpha\mu}$ eigentlich ist. Es gilt also

$$\mathfrak{K}_\alpha \cdot (\mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m) = \mathfrak{K}_\alpha \times \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m \subseteqq \mathfrak{G}$$

wegen des Jordan-Hölderschen Satzes sogar

(5) $$\mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{\mu-1} \times \mathfrak{K}_\alpha \times \mathfrak{H}_{\mu+1} \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{G}.$$

Allgemein liegt dem Beweis der letzten Gleichung (5) die einfache Tatsache zugrunde, *daß bei zwei beliebigen direkten Produktzerlegungen einer Gruppe* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_m = \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n$ $\mathfrak{A}_1$ *durch* $\mathfrak{B}_1$ *stets dann und nur dann ersetzt werden kann, wenn die Zuordnung* $A_1 \to$ ($\mathfrak{B}_1$ = *Komponente von* A_1) ($A_1 \in \mathfrak{A}_1$) *ein eigentlicher Isomorphismus ist.*

Wendet man das bisher Bewiesene hintereinander

1. bei den Zerlegungen (h) und (k) auf den Faktor $\mathfrak{H}_1$ an, wobei die Gleichung

(h₁) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{i_1} \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

entsteht,

2. bei den Zerlegungen ($\mathfrak{h}_1$) und ($\mathfrak{k}$) auf den Faktor $\mathfrak{H}_2$, woraus die Gleichung

$$(\mathfrak{h}_2) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{i_1} \times \mathfrak{K}_{i_2} \times \mathfrak{H}_3 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

entsteht, so erhält man, in diesem Sinne fortfahrend, den Satz 1 schrittweise (induktiv) in seinem vollen Umfange.

Zusatz. *Bei zwei Remakschen Zerlegungen einer Gruppe*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$$

gibt es zu jedem nichtabelschen $\mathfrak{H}_\mu$ genau ein mit $\mathfrak{H}_\mu$ normal-isomorphes $\mathfrak{K}_\mu$.

Beweis. Mindestens ein solches $\mathfrak{K}_\mu$ gibt es nach Satz 1. Mehr als eines kann es aber nicht geben, weil sonst zwei nichtabelsche Faktoren $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_\beta$ desselben direkten Produkts $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$ normal-isomorph sein müßten, was nicht möglich ist, da ein normaler $\mathfrak{K}_\alpha \mathfrak{K}_\beta$-Isomorphismus J nach Hilfssatz 5 $\mathfrak{K}_\alpha$ auf eine Untergruppe des *Zentrums* von $\mathfrak{K}_\beta$ abbildet, also gewiß nicht eigentlich sein kann.

Äquivalent mit der Eindeutigkeitsbehauptung des Satzes 1 ist auch der folgende, für manche Anwendungen zweckmäßigere

Satz 2. *Ist eine Gruppe auf zweierlei Art als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Faktoren dargestellt,*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m,$$

so gibt es stets einen eigentlichen, normalen Automorphismus Θ, der die erste in die zweite Zerlegung überführt, was in dem Sinne zu verstehen ist, daß $\mathfrak{H}_\mu \Theta = \mathfrak{K}_{i_\mu}$ gilt und die $\mathfrak{K}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{K}_{i_m}$ hierbei eine Permutation der $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ bilden.

Beweis. Ist $\mathfrak{H}_\mu$ mit $\mathfrak{K}_{i_\mu}$ normal-isomorph nach Satz 1 und Θ_μ ein infolgedessen existierender eigentlicher, normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{K}_{i_\mu}$-Isomorphismus, so erfüllt der Automorphismus

$$\Theta = H_1 \cdot \ldots \cdot H_m \to H_1 \Theta_1 \cdot \ldots \cdot H_m \Theta_m \qquad (H_1 \in \mathfrak{H}_1, H_2 \in \mathfrak{H}_2, \ldots, H_m \in \mathfrak{H}_m)$$

die Bedingung unseres Satzes. Daß umgekehrt aus Satz 2 die Eindeutigkeitsbehauptung des Satzes 1 hervorgeht, ist unmittelbar klar.

Da ein *eigentlicher*, normaler Automorphismus einer Gruppe zugleich zentral[7]) ist, was aus

$$B^{-1} \cdot A\Theta \cdot B = B^{-1}\Theta \cdot A\Theta \cdot B\Theta \quad \text{und} \quad A\Theta \cdot B \cdot (B\Theta)^{-1} = B \cdot (B\Theta)^{-1} \cdot A\Theta$$

hervorgeht, wenn man beachtet, daß mit A auch $A\Theta$ alle Elemente der Gruppe durchläuft, so lehrt Satz 2, *daß eine Gruppe auch bis auf zentrale*

---

[7]) Bei einem *uneigentlichen*, normalen Automorphismus A trifft dies im allgemeinen nicht zu, wie das Beispiel des Nullautomorphismus $P_0 = A \to E$ zeigt. In der Tat ist bei einem solchen der im Text gegebene Beweis nicht stichhaltig, da ja AA nicht mit A alle Elemente der Gruppe durchläuft.

Isomorphie eindeutig als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen dargestellt werden kann. Wir erhalten so die übliche Fassung der Krull-Schmidtschen Eindeutigkeitsbehauptung, die natürlich inhaltlich ebenfalls mit der in Satz 1 gegebenen Formulierung identisch ist.

§ 3.
Der Schmidtsche Austauschsatz.

Die Überführungsgleichungen (3) des Satzes 1 bringen den Inhalt des sogenannten Schmidtschen Austauschsatzes zum Ausdruck, der sich allgemein folgendermaßen formulieren läßt:

Satz 3 von Otto Schmidt [8]. *Das Produkt $\mathfrak{P}$ beliebiger Faktoren einer Remakschen Gruppenzerlegung*

(h) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

kann stets durch das Produkt $\mathfrak{Q}$ gewisser Faktoren einer anderen

(k) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$$

ersetzt werden; die Faktoren von $\mathfrak{P}$ lassen sich dabei denen von $\mathfrak{Q}$ umkehrbar eindeutig so zuordnen, daß entsprechende Faktoren zentral-(normal-) isomorph sind.

Die Auszeichnung der ersten Faktoren von (h) in den Gleichungen (3) des Satzes 1 ist natürlich unwesentlich, da in einem direkten Produkt die Reihenfolge der Faktoren gleichgültig ist.

Als Spezialfälle des Schmidtschen Austauschsatzes erwähnen wir: Jeder nichtabelsche Faktor von (h) kann gegen den (einzigen!) mit ihm normal-(zentral-)isomorphen Faktor von (k), ebenso das Produkt aller Faktoren von (h), die mit einem Abelschen $\mathfrak{H}_\mu$ isomorph sind, gegen das Produkt aller mit $\mathfrak{H}_\mu$ isomorphen Faktoren von (k) ausgetauscht werden; auf gewöhnliche, endliche Gruppen angewandt, entsteht hieraus das bekannte Ergebnis von Remak, daß in einer Remakschen Zerlegung einer gewöhnlichen, endlichen Gruppe das Produkt aller vorkommenden zyklischen Faktoren von derselben Primzahlpotenzordnung stets durch das isomorphe Produkt einer anderen Remakschen Zerlegung der Gruppe ersetzt werden kann [9].

§ 4.
Notwendige und hinreichende Bedingungen für die absolute (identische) Eindeutigkeit der Remakschen Gruppenzerlegungen.

Satz 4. *Damit eine Gruppe $\mathfrak{G}$ nur auf eine einzige Weise in das direkte Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen zerlegt werden kann, ist*

---

[8] Otto Schmidt, a. a. O., siehe Anm. [6].

[9] R. Remak, a. a. O. [siehe Anm. [6]], Satz 4.

hinreichend und notwendig, daß alle direkten Faktoren von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{N}$-charakteristisch[10]) *sind, wo $\mathfrak{N}$ die Menge aller normalen, eigentlichen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ bedeutet.*

Beweis. Nach Satz 2 ist die Bedingung hinreichend; sind nämlich

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{K}_1 \times \ldots \times \mathfrak{K}_m$$

zwei Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ im Sinne des Krull-Schmidtschen Satzes, so gibt es nach Satz 2 einen eigentlichen, normalen Automorphismus $\Theta \in \mathfrak{N}$, für den $\mathfrak{H}_\mu \supseteqq \mathfrak{H}_\mu \Theta = \mathfrak{K}_{i_\mu} \supseteqq \mathfrak{K}_{i_\mu} \Theta^{-1} = \mathfrak{H}_\mu$ gilt, woraus $\mathfrak{H}_\mu = \mathfrak{K}_{i_\mu}$ folgt.

Die Notwendigkeit der Bedingung beruht darauf, daß, wenn in einer Remakschen Zerlegung von $\mathfrak{G}$

$$\text{(h)} \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$$

ein Faktor $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht $\mathfrak{N}$-charakteristisch ist, stets ein eigentlicher Automorphismus Π angegeben werden kann, der (h) in eine von (h) verschiedene Remaksche Zerlegung (h′) von $\mathfrak{G}$ überführt.

$$\text{(h}'\text{)} \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \Pi \times \ldots \times \mathfrak{H}_m \Pi.$$

Wir gelangen zu einem solchen Automorphismus Π auf folgendem Wege:

Zunächst wählen wir aus $\mathfrak{N}$ einen Automorphismus Θ aus, der $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht auf eine Untergruppe von sich abbildet ($\mathfrak{H}_\alpha \Theta$ *nicht* $\subseteqq \mathfrak{H}_\alpha$). Hierauf führen wir die m Automorphismen $A \to A_\mu = \mathsf{H}_\mu$ ein, wo A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$ und A_μ die $\mathfrak{H}_\mu$-Komponente von A bedeutet. Aus den H_μ und Θ setzen wir durch Multiplikation die m^2 Automorphismen $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = \Theta_{\mu\nu}$ zusammen. Für $\mu \neq \nu$ bilden wir aus diesen die Summe $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu + P_1$, $-\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu + P_1$, was im Sinne der in Anm. [5]) angegebenen Definition darum möglich ist, weil das Element $A\Theta_{\mu\nu} = A_\mu \Theta_{\mu\nu}$ wegen

$$A_\mu \Theta_{\mu\nu} = (H_\nu^{-1} \cdot A_\mu \cdot H_\nu) \Theta_{\mu\nu} = H_\nu^{-1} \cdot A_\mu \Theta_{\mu\nu} \cdot H_\nu \qquad (H_\nu \in \mathfrak{H}_\nu)$$

zum Zentrum von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch zum Zentrum von $\mathfrak{G}$ gehört und $\Theta_{\mu\nu} = \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu$ daher stets ein Zentrumsautomorphismus[11]) ist (vgl. Hilfssatz 5, § 1). Schließlich wählen wir unter den Summen $\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\nu + P_1$ ($\alpha \neq \nu$) noch eine von P_1 verschiedene $\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1$ ($\alpha \neq \beta$) aus, bei der also $\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta \neq P_0$ ist, eine solche muß existieren, da sonst wegen

$$\sum_{\mu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu = P_1, \quad \Theta = P_1 \Theta P_1 = \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu$$

---

[10]) Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so heißt eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{M}$-charakteristisch, wenn sie bei allen Automorphismen aus $\mathfrak{M}$ auf eine Untergruppe von sich selber abgebildet wird.

[11]) So nenne ich nach F, § 10 diejenigen Automorphismen einer Gruppe, welche die Gruppe auf eine Untergruppe ihres Zentrums abbilden. Zentrumsautomorphismen sind dadurch ausgezeichnet, daß sie zu *allen* Automorphismen addierbar sind.

die Beziehung

$$\mathfrak{H}_\alpha \Theta = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\nu = \mathfrak{H}_\alpha \mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\alpha \subseteqq \mathfrak{H}_\alpha$$

gelten würde, was der Voraussetzung über Θ widerspricht.

Mit $\Pi = \mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1 \neq P_1$ $(\alpha \neq \beta)$ haben wir nun in der Tat einen Automorphismus von der verlangten Beschaffenheit erhalten: Π ist eigentlich, da wegen $\mathsf{H}_\alpha \mathsf{H}_\beta = P_0$ die Relation $(\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1)\cdot(-\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1) = P_1$ besteht. Außerdem führt Π die Zerlegung (h) in eine zweite (h′) über, die von (h) verschieden ist, weil die Beziehungen

$$\mathfrak{H}_\mu = \mathfrak{H}_\mu \Pi \text{ für } \mu \neq \alpha, \qquad \mathfrak{H}_\alpha \neq \mathfrak{H}_\alpha (\mathsf{H}_\alpha \Theta \mathsf{H}_\beta + P_1)$$

gelten.

Aus dem soeben Bewiesenen folgt, daß in einer Gruppe, die nur eine einzige Remaksche Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ zuläßt, alle Faktoren $\mathfrak{H}_\mu$ dieser Zerlegung und mit diesen überhaupt alle direkten Faktoren, die ja durch Multiplikation gewisser $\mathfrak{H}_\mu$ entstehen, notwendig $\mathfrak{N}$-charakteristisch sein müssen.

Über die an Satz 4 anschließende Frage, wann ein direkter Faktor von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{N}$-charakteristisch ist, erhalten wir Aufschluß durch

S a t z 5 a. *Ein Faktor $\mathfrak{H}_\alpha$ einer beliebigen direkten Produktzerlegung einer Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ $(1 \leqq \alpha \leqq m)$ ist stets dann und nur dann $\mathfrak{N}$-charakteristisch [wo $\mathfrak{N}$ (wie in Satz 4) die Menge der eigentlichen, normalen Automorphismen bezeichnet], wenn normale $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen — von der „trivialen" Abbildung $H_\alpha \to E$ (welche jedem Element $H_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$ das Einheitselement E von $\mathfrak{G}$ zuordnet) abgesehen — für $\nu \neq \alpha$ nicht existieren.* (In diesem Satz werden die $\mathfrak{H}_\mu$ nicht direkt unzerlegbar vorausgesetzt!)

B e w e i s. Zunächst beweisen wir die erste Hälfte der Behauptung: Ist die Bedingung unseres Satzes erfüllt, so ist $\mathfrak{H}_\alpha$ $\mathfrak{N}$-charakteristisch. Es sei $\Theta \in \mathfrak{N}$. Bezeichnet man den Automorphismus $A \to A_\mu$ (welcher jedem Element A aus $\mathfrak{G}$ seine $\mathfrak{H}_\mu$-Komponente A_μ zuordnet) genau wie beim Beweis des Satzes 4 mit H_μ, so gilt $\sum_{\mu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu = P_1$ und $\Theta = P_1 \Theta P_1 = \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu$. Zur Abkürzung werde $\mathsf{H}_\mu \Theta \mathsf{H}_\nu = \Theta_{\mu\nu}$ gesetzt. Dann ist die Abbildung $H_\mu \to H_\mu \Theta_{\mu\nu}$, wo H_μ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{H}_\mu$ bedeutet, ein normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus, der unter den gemachten Voraussetzungen für $\mu = \alpha$, $\nu \neq \alpha$ mit der trivialen Zuordnung $\mathfrak{H}_\alpha \to E$ identisch sein muß. Hieraus folgt (für *alle* $A \in G$): $A\Theta_{\alpha\nu} = A_\alpha \Theta_{\alpha\nu} = E$, d. h. $\Theta_{\alpha\nu} = P_0$. Daher gilt

$$\mathfrak{H}_\alpha \Theta = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Theta_{\mu\nu} = \mathfrak{H}_\alpha \sum_{\nu=1}^{m} \Theta_{\alpha\nu} = \mathfrak{H}_\alpha \Theta_{\alpha\alpha} \subseteqq \mathfrak{H}_\alpha,$$

was zu beweisen war.

Die Notwendigkeit der Bedingung beweisen wir, indem wir zeigen, daß aus jedem nicht-trivialen, normalen $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus J eigentliche, normale Automorphismen konstruiert werden können, die $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht auf eine Untergruppe von sich abbilden. Automorphismen dieser Art erhalten wir dadurch, daß wir von J zu dem Automorphismus

$$A = H_1 \cdot \ldots \cdot H_m \to H_\alpha J \qquad (H_1 \in \mathfrak{H}_1, H_2 \in \mathfrak{H}_2, \ldots, H_m \in \mathfrak{H}_m)$$

(den ich in F, § 15 die „Erweiterung von J“ genannt habe) und von A zu den Summen $A + P_1$, $-A + P_1$ übergehen, die im Sinne der in der Anm. [5]) gegebenen Definition in der Tat gebildet werden können, da J nach Hilfssatz 5 (§ 1) $\mathfrak{H}_\alpha$ auf eine Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch des Zentrums von $\mathfrak{G}$ abbildet und A infolgedessen ein Zentrumsautomorphismus ist [siehe Anm. [11])]. Mühelos bestätigt man, daß $A + P_1$, $-A + P_1$ die gewünschte Eigenschaft haben. Sie sind normal und eigentlich, ersteres, weil A und P_1 normal sind, letzteres, weil sie der aus $A^2 = P_0$ folgenden Relation $(A + P_1)(-A + P_1) = P_1$ genügen, ferner bilden sie — wie unmittelbar ersichtlich — $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht auf eine Untergruppe von $\mathfrak{H}_\alpha$ ab.

Satz 5b. *Die Bedingung des Satzes* 5a *ist äquivalent damit, daß — unter $\mathfrak{K}_\alpha$ die Kommutatorgruppe* [12]) *von $\mathfrak{H}_\alpha$ verstanden — homomorphe Abbildungen von $\overline{\mathfrak{H}}_\alpha = \mathfrak{H}_\alpha/\mathfrak{K}_\alpha$ auf eine von der Einheitsgruppe (E) verschiedene Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$ nicht möglich sind. Bei einer gewöhnlichen, endlichen Gruppe ist hierfür notwendig und hinreichend, daß die Ordnung der Gruppe $\overline{\mathfrak{H}}_\alpha$ und die Ordnung des Zentrums $\mathfrak{Z}_\nu$ von $\mathfrak{H}_\nu$ keinen echten Teiler gemein haben, was bei einer Abelschen (gewöhnlichen, endlichen) Gruppe stets dann und nur dann der Fall ist, wenn Ordnung und Index von $\mathfrak{H}_\alpha$ teilerfremd zueinander sind.*

Beweis. Nach Hilfssatz 5 (§ 1) sind normale $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen (im Fall $\nu \neq \alpha$) dadurch ausgezeichnet, daß sie $\mathfrak{H}_\alpha$ auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$ abbilden, die bei „nicht-trivialen“ $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen und nur bei diesen überdies von (E) verschieden ist. Im Besitz dieser Charakterisierung nicht-trivialer, normaler $\mathfrak{H}_\alpha \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismen übersieht man die Äquivalenz der in den Sätzen 5a und 5b angegebenen Bedingungen unmittelbar; denn allgemein gilt ja der fast triviale

Hilfssatz 6. *Bei beliebigen Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit demselben Operatorensystem sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$-Isomorphismen, die $\mathfrak{A}$ auf eine* A b e l s c h e *Unter-*

---

[12]) Die Kommutatorgruppe der operatorfreien Gruppe ist für jedes Operatorensystem ein zulässiger Normalteiler, d. h. nach einer von Herrn F. Levi in seiner Arbeit: Über die Untergruppen der freien Gruppen (2. Mittlg.), Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 92 eingeführten Bezeichnungsweise — „vollinvariant“; für jeden Operator $\omega \in \Omega$ gilt nämlich $\omega(A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1}) = \omega A \cdot \omega B \cdot \omega A^{-1} \cdot \omega B^{-1}$.

gruppe $\mathfrak{B}'$ *von* $\mathfrak{B}$ *abbilden, stets dann und nur dann möglich, wenn* $\mathfrak{B}'$ *zu* $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^*$ *homomorph ist, wo* $\mathfrak{A}^*$ *die Kommutatorgruppe von* $\mathfrak{A}$ *bedeutet.* Daß die Bedingung hinreicht, ist nach dem Homomorphiesatz unmittelbar klar ($\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^* \sim \mathfrak{B}'$). Ebenso einfach erkennt man auch die Notwendigkeit der Bedingung, wenn man beachtet, daß in $\mathfrak{A}$ alle Normalteiler $\mathfrak{A}'$ mit Abelscher Restklassengruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{A}^*$ umfassen und nach dem ersten Isomorphiesatz $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \cong (\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}^*)/(\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}^*)$ gilt. — Im Spezialfall des Satzes 5 b ist $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{B}'$ zu setzen!

Durch Zusammenfassung der Sätze 4, 5 a und 5 b erhalten wir

Satz 6. *Eine zweite notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Gruppe nur eine Zerlegung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ *in direkt unzerlegbare Untergruppen besitzt, besteht darin, daß neben der trivialen Abbildung* $H_\mu \to E$ *normale* $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$*-Isomorphismen* ($\mu \neq \nu$) *oder — was nach Satz* 5 b *auf dasselbe herausläuft — homomorphe Abbildungen von* $\overline{\mathfrak{H}}_\mu = \mathfrak{H}_\mu/\mathfrak{K}_\mu$ *auf* $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ *nicht existieren, wobei* $\mathfrak{K}_\mu$ *die Kommutatorgruppe von* $\mathfrak{H}_\mu$, $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ *eine von* (E) *verschiedene Untergruppe des Zentrums von* $\mathfrak{H}_\nu$ *bedeutet.* Im Spezialfall Abelscher Gruppen ist dieser Satz mit dem von Herrn Krull in seiner Arbeit: Über verallgemeinerte, endliche, Abelsche Gruppen [a. a O., siehe Anm. [6])], Satz 13 ausgesprochenen Kriterium identisch.

Satz 7a. *Eine hinreichende, allerdings nicht notwendige Bedingung für die absolute Eindeutigkeit der Remakschen Zerlegungen einer Gruppe ist auch die, daß die Gruppe keinen vom Nullautomorphismus* $P_0 = A \to E$ *verschiedenen Zentrumsautomorphismus besitzt.*

Beweis. Nach Satz 6 ergibt sich die Behauptung daraus, daß unter den gemachten Voraussetzungen ein nicht-trivialer, normaler $\mathfrak{H}_\mu \mathfrak{H}_\nu$-Isomorphismus J nicht existieren kann, wenn $\mathfrak{H}_\mu$, $\mathfrak{H}_\nu$ voneinander verschiedene Faktoren einer beliebigen Remakschen Zerlegung der Gruppe bedeuten. Gäbe es nämlich einen solchen, so müßte die Gruppe — entgegen der Bedingung unseres Satzes — auch einen von P_0 verschiedenen Zentrumsautomorphismus besitzen, da wir, um einen solchen zu erhalten, nur von J zu der sogenannten „Erweiterung" von J, d. h. der Abbildung $\Lambda = H_1 \ldots H_m \to H_\mu J$ überzugehen brauchten. In der Tat würde J den Faktor $\mathfrak{H}_\mu$ nach Hilfssatz 5 (§ 1) auf eine von der Einheitsgruppe (E) verschiedene Untergruppe des Zentrums von $\mathfrak{H}_\nu$, also auch des Zentrums von $\mathfrak{G}$ abbilden, auf welche auch $\mathfrak{G}$ von Λ abgebildet würde.

Noch einfacher ergibt sich — wie wir bereits in der Einleitung andeuteten — nach Satz 4 (oder auch 2) die Behauptung direkt daraus, daß die Gruppe unter der Bedingung unseres Satzes neben dem identischen Automorphismus keinen eigentlichen, normalen (zentralen) Automorphismus Θ mehr besitzen kann, da bei einem solchen die Zuordnung

$A \to A \cdot (A\Theta)^{-1} = Z$ der Relation $A \cdot (A\Theta)^{-1} \cdot B \cdot (B\Theta)^{-1} = A \cdot B \cdot (A\Theta \cdot B\Theta)^{-1}$ zufolge ein *Zentrumsautomorphismus*, in unserem Falle also $Z = P_0$, d. h. $\Theta = P_1$ sein muß.

Satz 7b. *Die Bedingung des Satzes* 7a *kann auch in der gleichwertigen Fassung formuliert werden, daß homomorphe Abbildungen der Restklassengruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ *nach der Kommutatorgruppe* $\mathfrak{K}$ (*von* $\mathfrak{G}$) *auf Untergruppen* $\overline{\mathfrak{Z}}$ *des Zentrums* (*von* $\mathfrak{G}$) *für* $\overline{\mathfrak{Z}} \neq (E)$ *nicht existieren.*

Beweis. Genau wie bei den Sätzen 5a und 5b ergibt sich auch hier wieder der Zusammenhang zwischen den Sätzen 7a und 7b aus dem Hilfssatz 6, wenn dieser auf den Spezialfall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}' = \overline{\mathfrak{Z}}$ angewandt wird.

Aus den Sätzen 7a und 7b folgt als spezieller Fall

Satz 8 [Speiserscher Dualismus[13]]. *Eine Gruppe, die mit ihrer Kommutatorgruppe identisch ist, oder eine solche, deren Zentrum nur die Einheitsgruppe* (*E*) *als zulässige Untergruppe enthält, kann nur auf eine einzige Weise als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen dargestellt werden.*

Man sieht, daß beide Fälle des Speiserschen Dualismus einer gemeinsamen Wurzel, dem fast trivialen Satz 7a (bzw. 7b) entspringen und sich aus diesem Zusammenhang das Bestehen dieses merkwürdigen Dualismus sehr einfach erklärt.

Eine Anwendung der Sätze dieses Paragraphen auf gewöhnliche endliche Gruppen führt auf bekannte Ergebnisse zurück, die schon von Herrn Remak[14]) aufgestellt und kürzlich von Herrn Shoda[15]) in seiner Arbeit „Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe" neu bewiesen wurden:

Satz 9. *Damit eine gewöhnliche, endliche Gruppe nur eine einzige Zerlegung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \ldots \times \mathfrak{H}_m$ *in direkt unzerlegbare Untergruppen besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß der Index der Kommutatorgruppe* $\mathfrak{K}_\mu$ *von* $\mathfrak{H}_\mu$ *unter* $\mathfrak{H}_\mu$ *und die Ordnung des Zentrums* $\mathfrak{Z}_\nu$ *von* $\mathfrak{H}_\nu$ ($\mu \neq \nu$) *teilerfremd zueinander sind* (*vgl. Satz* 6), *was z. B. bei solchen nicht-kommutativen Gruppen, bei denen Index der Kommutatorgruppe* $\mathfrak{K}$ *und Ordnung des Zentrums* $\mathfrak{Z}$ *von* $\mathfrak{G}$ *keinen von* ± 1 *verschiedenen Teiler gemein haben, immer und bei kommutativen Gruppen stets dann und nur dann der Fall ist, wenn die Gruppe zyklisch ist.*

---

[13]) A. Speiser, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, 2. Aufl., S. 136.

[14]) Man vergleiche hierzu z. B. die in der Anm. [6]) zitierte Arbeit, S. 308.

[15]) K. Shoda, Über die Automorphismen einer endlichen zerlegbaren Gruppe, Journ. of the Fac. of Science, Univ. of Tokio, Sect. I, vol. II, part 2. Bei Herrn Shoda handelt es sich zwar nicht wie hier um Remaksche, sondern um „normale" Zerlegungen, der Unterschied ist aber nicht wesentlich.

§ 5.

Verallgemeinerungen.

$\mathfrak{M}$ sei irgendeine Menge von Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Operatorensystem Ω und Ω^* diejenige Menge, welche aus Ω durch Hinzunahme aller Automorphismen aus $\mathfrak{M}$ entsteht. Offenbar ist Ω^* wieder ein System von Operatoren, die auf die Elemente aus $\mathfrak{G}$ angewendet werden können, so daß $\mathfrak{G}$ auch als Gruppe mit dem Operatorensystem Ω^* aufgefaßt werden kann. Die für Gruppen geforderte Endlichkeitsbedingung: der Doppelkettensatz für die Normalteiler, ist natürlich erfüllt, weil ja jede normale Ω^*-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ immer zugleich normale Ω-Untergruppe ist. Auf die Ω^*-Gruppe $\mathfrak{G}$ wenden wir jetzt die Ergebnisse aus den §§ 2, 3 und 4 an. Da die Ω^*-Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit den $\mathfrak{M}$-charakteristischen Untergruppen der Ω-Gruppe $\mathfrak{G}$ identisch sind, erhalten wir auf diese Weise die folgenden Resultate:

Satz 10. *Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so läßt sich $\mathfrak{G}$ stets bis auf zentrale (normale) Isomorphie eindeutig als direktes Produkt solcher Untergruppen darstellen, welche $\mathfrak{M}$-charakteristisch und $\mathfrak{M}$-charakteristisch direkt unzerlegbar sind, d. h. nicht weiter in das direkte Produkt $\mathfrak{M}$-charakteristischer, echter Untergruppen zerfällt werden können. Diese Zerlegungen sind sogar absolut eindeutig bestimmt, wenn alle $\mathfrak{M}$-charakteristischen, direkten Faktoren von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{N}^*$-charakteristisch sind, wobei $\mathfrak{N}^*$ die Menge derjenigen eigentlichen, normalen Automorphismen bedeutet, die mit $\mathfrak{M}$ elementweise vertauschbar sind;* für die Ω^*-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist nämlich $\mathfrak{N}^*$ die Menge der eigentlichen, normalen Automorphismen. *Absolute Eindeutigkeit besteht bei den Zerlegungen dieses Satzes insbesondere dann, wenn $\mathfrak{M}$ die Menge $\mathfrak{N}$*[16]*) umfaßt, beispielsweise dann, wenn $\mathfrak{M}$ die Menge aller Automorphismen, der Bereich $\mathfrak{A}$ aller normalen Automorphismen, die Gesamtheit aller eigentlichen Automorphismen von $\mathfrak{G}$*[17]*) oder die Menge $\mathfrak{N}$ selber ist.*

---

[16]) $\mathfrak{N}$ bedeutet hier genau wie in Satz 4 die Gesamtheit aller eigentlichen, normalen Automorphismen der Ω-Gruppe $\mathfrak{G}$.

[17]) Für gewöhnliche endliche Gruppen beweist Herr Shoda die absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in charakteristische und charakteristisch direkt unzerlegbare Untergruppen im Anhang der in der Anm. [15]) zitierten Arbeit.

(Eingegangen am 1. August 1933.)